

### 3. Kmitočtové charakteristiky

Po základním seznámení s programem ATP a jeho preprocesorem ATPDraw následuje využití jednotlivých prvků v jednoduchých obvodech. Jednotlivé příklady obvodů jsou uzpůsobeny tak, aby odpovídali obsahu předmětu Teorie obvodů a demonstrovali tak teoretické poznatky. Mezi nejjednodušší příklady zapojení prvků induktoru, kapacitoru a rezistoru patří sérioparalelní kombinace spojení těchto prvků. Program ATP umožňuje kromě výpočtu časových závislostí určovat frekvenční charakteristiky těchto obvodů, přitom je možno počítat impedanci nebo admitanci, a to jak velikost a fázi, tak jejich reálné a imaginární složky.

#### 3.1 Sériový obvod RL

Impedance obvodu je určena vztahem:

$$\hat{Z} = R + j\omega L \quad (3.1)$$

Většinou se za vztažnou hodnotu reaktance volí hodnota při určitém, pro obvod významném kmitočtu  $\omega_0$  a zavede se poměrný kmitočet  $p$  jako parametr proměnnosti rovnice. Pro poměrný kmitočet platí:

$$p = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (3.2)$$

Se zavedením poměrného kmitočtu vznikne rovnice:

$$\hat{Z} = R + j \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) \omega_0 L = R + jpX_0 \quad (3.3)$$

Určuje se tzv. normovaná kmitočtová charakteristika, tj. charakteristika poměrných hodnot, jejíž obraz se získá na základě následující rovnice:

$$\hat{\xi} = 1 + j\omega \frac{L}{R} = 1 + j \frac{\omega}{\omega_0} = 1 + jp \quad (3.4)$$

kteřá vznikla dělením rovnice (3.3) činným odporem  $R$ . Hodnota tohoto odporu se volí za vztažnou hodnotu pro poměrné impedance. Pro vztažný kmitočet platí:

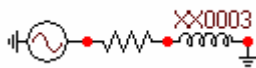
$$\omega_0 = \frac{R}{L} = \frac{1}{\tau} \quad (3.5)$$

Kde  $\tau$  je časová konstanta sériového obvodu s činným odporem a indukčností.

Z charakteristik v komplexní rovině je možné odečíst jak velikost (modul) poměrné veličiny (impedance, admitance či proudu), tak i její argument (u proudu fázový posuv vůči napětí). Nejčastěji se používají samostatné charakteristiky pro modul a argument. U proudu se u těchto charakteristik používá název amplitudová a fázová. Pro široké spektrum kmitočtů se pro kmitočet jako nezávisle proměnnou se používá logaritmické stupnice a pro proměnnou hodnotu amplitudy (modulu) v modulové charakteristice je užívána jednotka decibel (dB).

### Řešení programem ATP

Pro příklad frekvenčních charakteristik sériové spojení  $RL$  dvojbranu s hodnotami rezistoru  $R = 10 \Omega$  a induktoru  $L = 20 \text{ mH}$ . Obvod je napájen střídavým napětím o amplitudě  $U = 100 \text{ V}$  s frekvencí  $f = 50 \text{ Hz}$ .



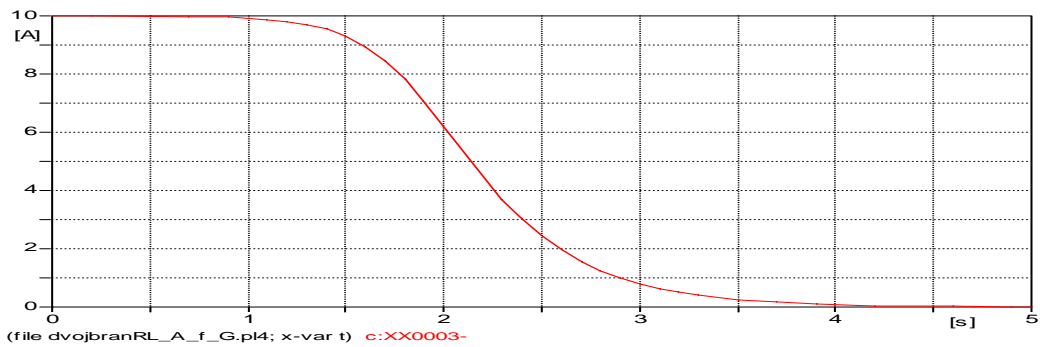
Obr. 3.1 Schéma zapojení dvojbranu  $RL$

V nabídce **Output** u sledovaného prvku je nejlépe označit **Curr&Volt** (resp. **Power&Energy**). V **ATP Settings / Simulation** se v **Simulation type** zvolí **Frequency scan** a je možno vybrat výpočet jen amplitudy **Magnitude**, nebo jen polárních souřadnic (amplitudy a fáze **Angle**), nebo jen reálné a imaginární **Real / Imag** složky anebo všechny tyto výpočty. (při volbě jen napětí nebo proudu v Output daného prvku lze zadat pouze výpočet amplitudy). Po volbě **Frequency scan** se otevře nové dialogové okno, kde se nastaví jednotlivé parametry. Pro **NPD** platí:

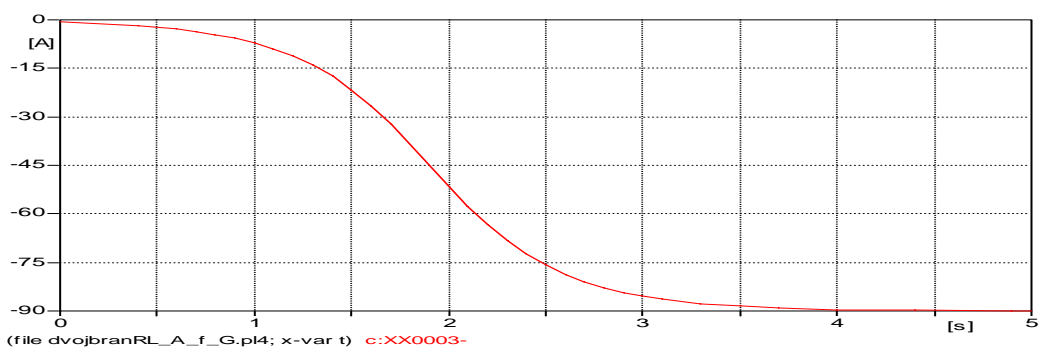
- při nulové hodnotě je použito aritmetické rozložení frekvencí mezi **max** a **min** (kladná) s krokem **df** v Hz
- pro přirozené číslo je rozložení geometrické a pro počet hodnot platí  $n: NPD = n / \log(f_{\text{max}} / f_{\text{min}})$

Pro aritmetické rozložení je v PlotXY na časové ose frekvence, pro geometrické mocnina desíti. Úhel se zobrazuje ve stupních.

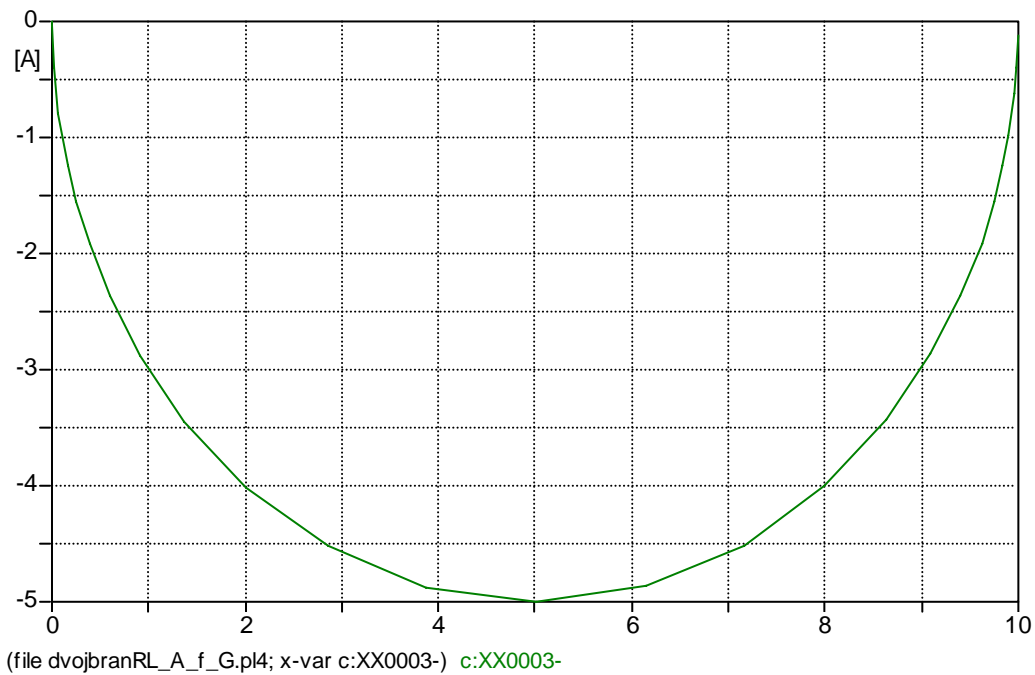
Po uložení souboru **CTRL-S**, vytvoření datového souboru **ATP / Make File** a spuštění řešení **ATP / run ATP** se získají frekvenční charakteristiky obvodu. Prvé dva průběhy ukazují polární souřadnice proudu pro kmitočty do 100 kHz. Na Obr. 3.4 jsou v Gaussově rovině zachyceny reálná a imaginární složka proudu pro stejný rozsah kmitočtů. (V okně PlotXY se křížek přesune k reálné složce a časová závislost se zruší). PlotXY standardně uvádí na vodorovné ose čas v sekundách, v případě frekvenčních charakteristik mu odpovídá frekvence v Hz.



Obr. 3.2 Amplitudová charakteristika proudu induktorem



Obr. 3.3 Fázová charakteristika proudu induktorem



Obr. 3.4 Proud induktorem v Gaussově rovině (složka reálná vodorovně, imaginární svisle)

### 3.2 Sériový obvod RC

Pro sériové spojení rezistoru a kapacitoru platí pro impedanci vztah:

$$\hat{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} \quad (3.6)$$

Zavedením poměrného kmitočtu vznikne rovnice:

$$\hat{Z} = R + j \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) \omega_0 L = R + j p x_0 \quad (3.7)$$

Obdobně jako v předchozím případě u  $RL$  obvodu se získá tzv. normovaná kmitočtová charakteristika, která má tvar:

$$\hat{\xi} = 1 + \frac{1}{j\omega RC} = 1 + \frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_0}} = 1 + \frac{1}{j p} = \frac{1 + j p}{j p} \quad (3.8)$$

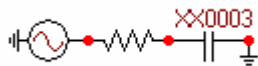
Vztažnými hodnotami jsou činný odpor  $R$  a kmitočet  $\omega_0$ , pro který platí:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau} \quad (3.9)$$

kde  $\tau$  je časová konstanta sériového obvodu  $RC$ .

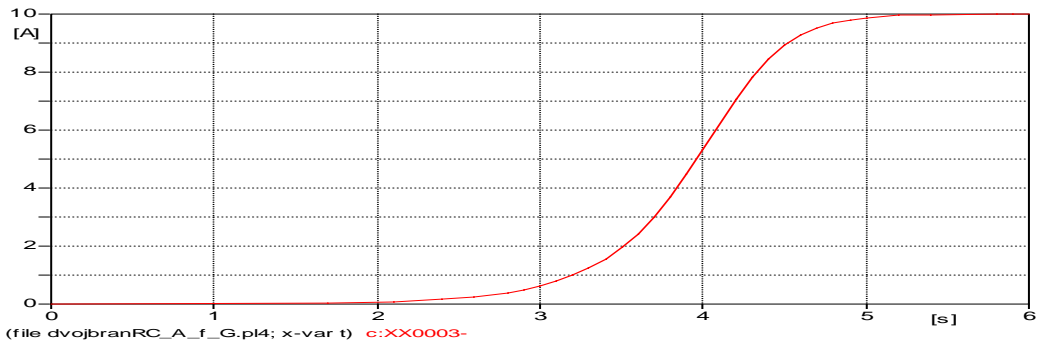
#### Řešení programem ATP

Postup je obdobný jako v předchozím případě, schéma zapojení odpovídá Obr. 3.5. Jedná se o sériové spojení rezistoru  $R = 10 \Omega$  a kapacitoru  $C = 1 \mu\text{F}$  a zdroje s napětím 100 V.

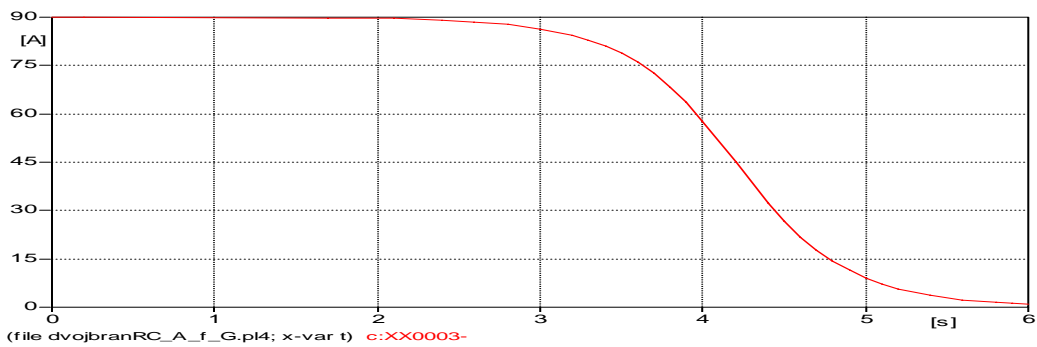


Obr. 3.5 Schéma zapojení dvojbranu  $RC$

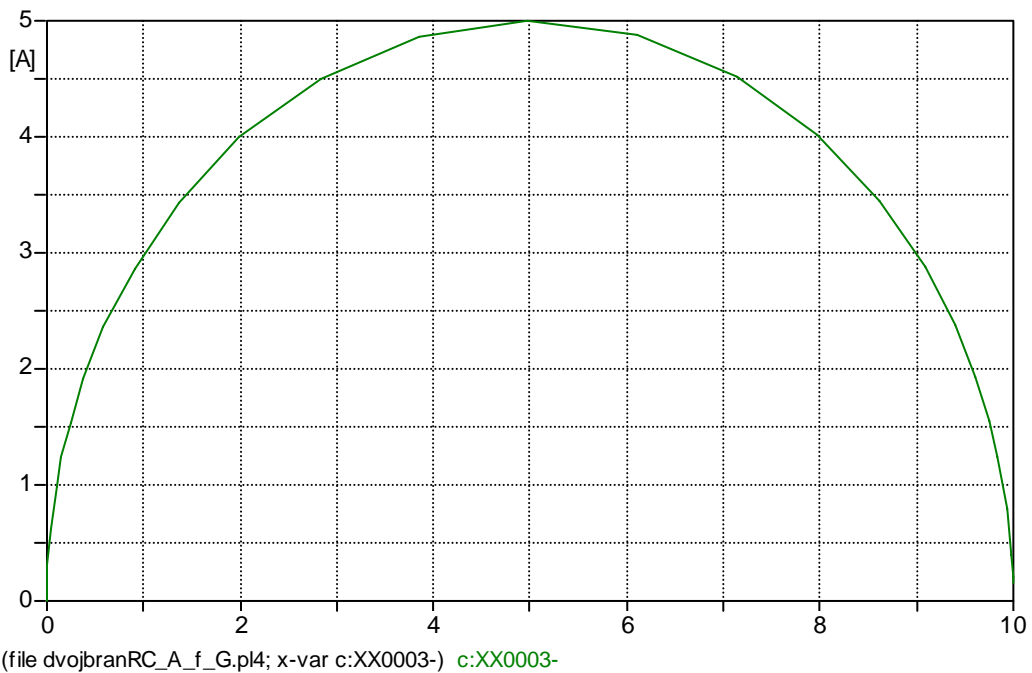
Následující postup je stejný jako v předchozím případě. Prvé dva průběhy ukazují polární souřadnice proudu pro kmitočty do 1 MHz. Na Obr. 3.8 jsou v Gaussově rovině zachyceny reálná a imaginární složka proudu pro stejný rozsah kmitočtů. (V okně PlotXY se křížek přesune k reálné složce a časová závislost se zruší).



Obr. 3.6 Amplitudová charakteristika proud kapacitorem



Obr. 3.7 Fázová charakteristika proudu kapacitorem



Obr. 3.8 Proud kapacitorem v Gaussově rovině (složka reálná vodorovně, imaginární svisle)

### 3.3 Rezonance v sériovém obvodu RLC

Pro kmitočtovou závislost impedance sériového obvodu  $RLC$  podle Obr. 1.14 platí:

$$\hat{Z}(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (3.10)$$

Je-li splněno:

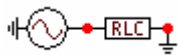
$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (3.11)$$

Nastává v obvodu sériová rezonance, kdy impedance obvodu je rovna pouze činnému odporu, má tedy nejmenší možnou velikost. Proud při rezonanci se nazývá rezonanční proud a dosahuje své největší hodnoty. A přitom pro rezonanční kmitočet platí Thomsonův vztah:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.12)$$

#### Řešení programem ATP

Jednoduchý příklad sériového obvodu  $RLC$  s rezistorem  $R = 10 \Omega$ , induktorem  $L = 20 \text{ mH}$  a kapacitorem  $C = 1 \mu\text{F}$ , který je napájen střídavým zdrojem s amplitudou  $U = 100 \text{ V}$ , představuje Obr. 3.9.



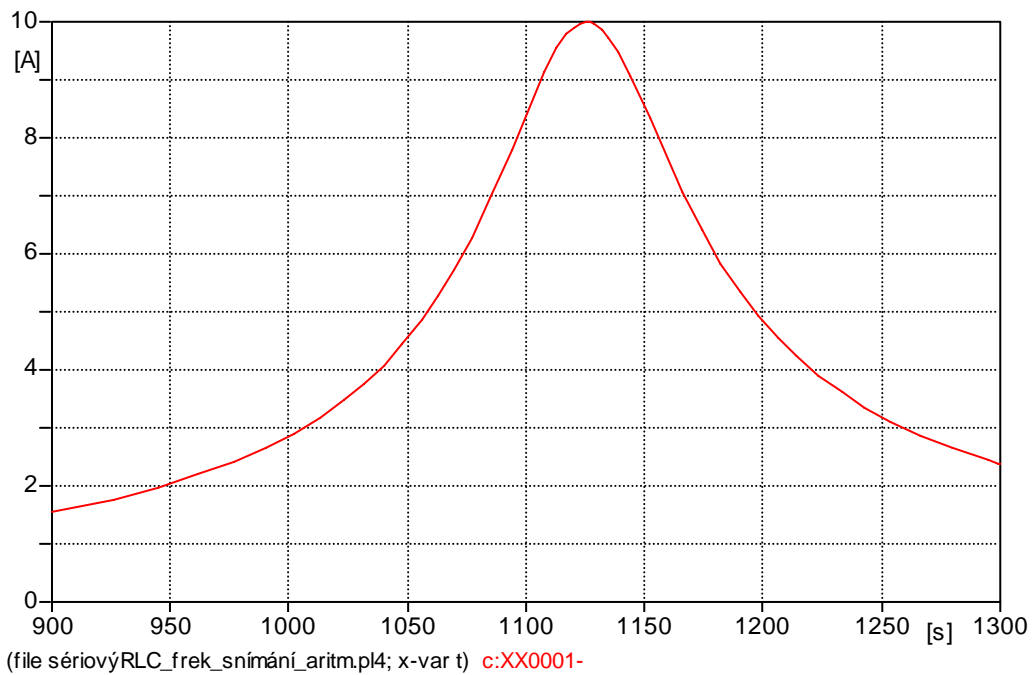
Obr. 3.9 Schéma zapojení sériového  $RLC$  obvodu

Po nakreslení daného obvodu v preprocesoru ATPDraw a zadání jednotlivých parametrů obvodu následuje nastavení vlastního frekvenčního snímání. (V obvodu je použit prvek  $RLC$  a v nabídce **Output** je nastaveno sledování proudu prvkem). Nastavení vlastní simulace se provede jako v předchozím případě.

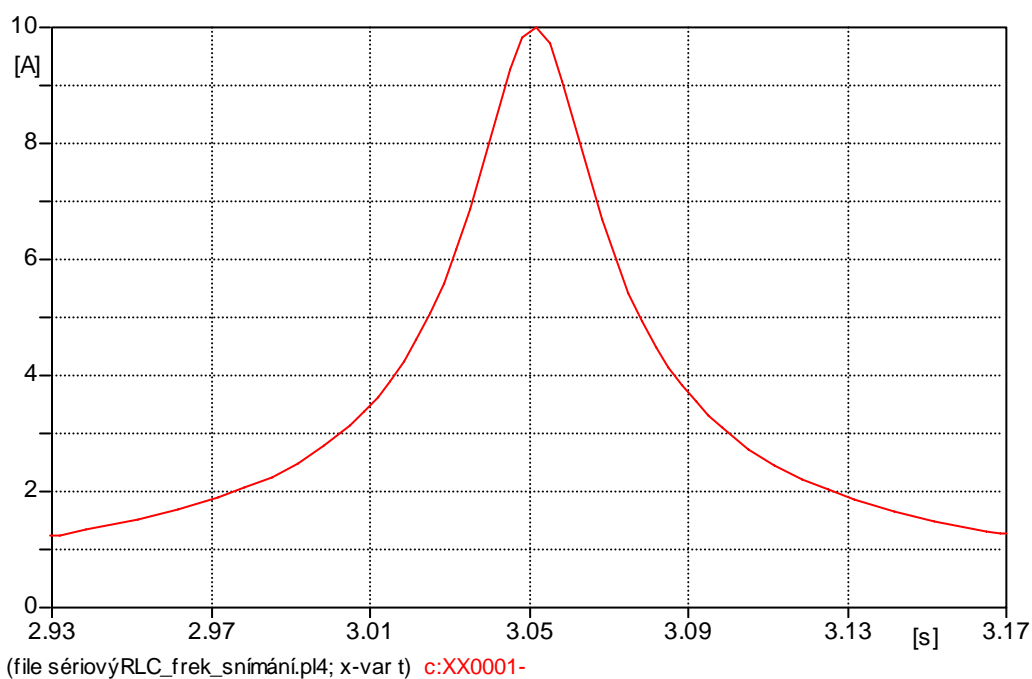
Průběh proudu při rezonanci sériového obvodu  $RLC$  ukazují Obr. 3.10 a 3.11. V druhém průběhu je přitom použito geometrické rozložení frekvencí, kdy v nabídce **frequency scan** je nastaveno **NPD** = 300 (hodnota **df** může být libovolná) a na vodorovné ose jsou hodnoty exponentu mocniny desítky pro kmitočet v Hz.

Rezonanční kmitočet obvodu má velikost:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,02 \cdot 1}} = 1126 \text{ Hz} \quad (3.13)$$



Obr. 3.10 Průběh proudu *RLC* obvodu při sériové rezonanci s lineární stupnicí frekvence



Obr 3.11 Průběh proudu *RLC* obvodu při rezonanci s logaritmickou stupnicí frekvence

Rezonančnímu kmitočtu 1126 Hz zde odpovídá hodnota  $10^{3,05}$  Hz

### 3.4 Rezonance v paralelním obvodu RLC

Při paralelním spojení ideálních dvojpólů  $R$ ,  $L$ ,  $C$  se sčítají jejich vodivosti:

$$G = \frac{1}{R} \quad (3.14)$$

$$B_L = \frac{1}{\omega L} \quad (3.15)$$

$$B_C = \omega C \quad (3.16)$$

Výsledná komplexní admitance obvodu je:

$$\hat{Y}(\omega) = G + j\omega C - \frac{1}{j\omega L} \quad (3.17)$$

Jestliže kapacitní a indukční susceptance mají stejnou velikost, vymizí imaginární složka admitance a obvod je ve stavu rezonance. Admitance je rovna činné vodivosti  $G$ . Má tedy nejmenší možnou velikost a obvodem protéká při daném napětí nejmenší možný proud a je ve fázi s napětím zdroje. Z rovnosti susceptancí při rezonanci plyne vztah pro rezonanční kmitočet rovnice (3.13). Skutečný paralelní obvod obsahuje technickou cívku s odporem  $R$  a indukčností  $L$ , k níž je paralelně připojen kondenzátor s kapacitou  $C$  (viz. Obr. 3.14). Pro admitanci tohoto obvodu platí:

$$\hat{Y}(\omega) = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C \quad (3.18)$$

Při rezonanci vymizí imaginární složka admitance, platí tedy:

$$\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = 0 \quad (3.19)$$

Odtud rezonanční kmitočet skutečného paralelního obvodu:

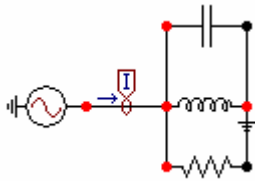
$$f_{rs} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2} \quad (3.20)$$

#### Řešení programem ATP

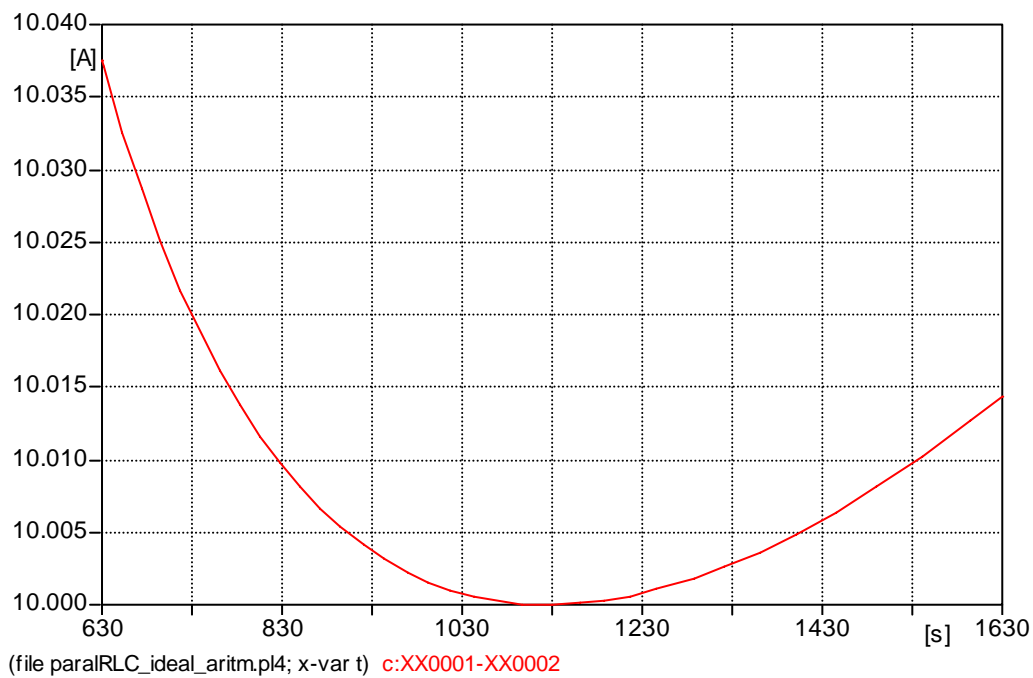
Uvažujme nejprve případ paralelního  $RLC$  obvodu dle Obr. 3.12, kde jsou paralelně zapojeny induktor  $L = 20$  mH, kapacitor  $C = 1$   $\mu$ F a rezistor  $R = 10$   $\Omega$ . Obvod je napájen střídavým zdrojem s  $U = 100$  V.



Pro tyto parametry obvodu je kmitočet rezonance roven 1126 Hz (viz rovnice 3.13). Schéma zapojení ukazuje Obr. 3.12. Pro aritmetické rozložení kmitočtů jsou voleny hodnoty: **min** = 630, **max** = 1630 a **df** = 1 (**NPD** = 0).

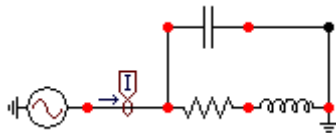


Obr. 3.12 Schéma zapojení ideálního paralelního *RLC* obvodu



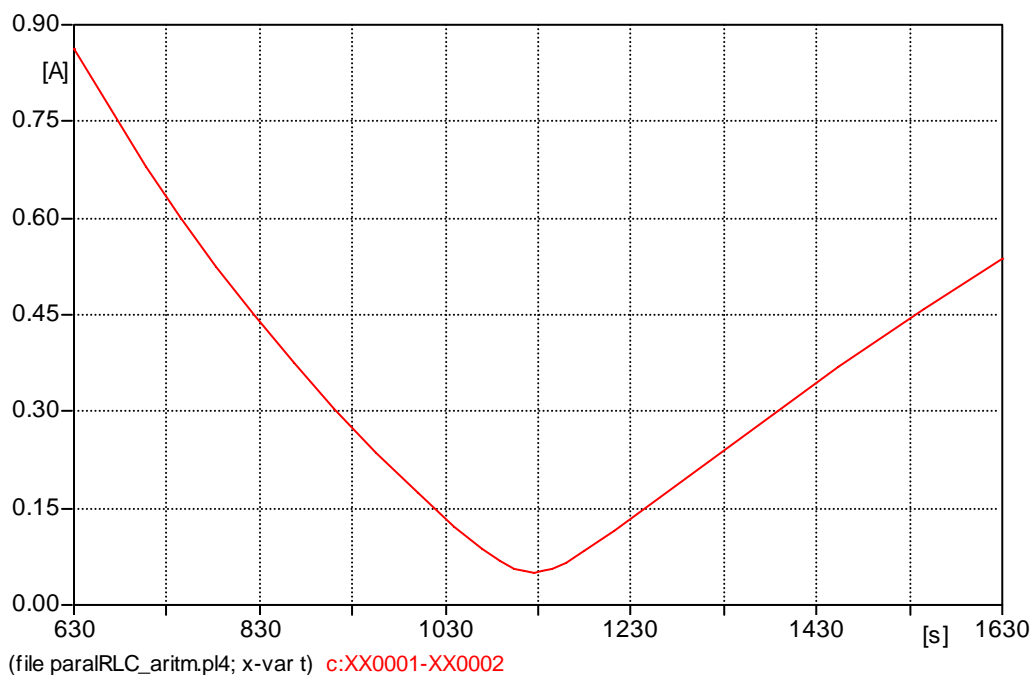
Obr.3.13 Průběh proudu při rezonanci ideálního paralelního *RLC* obvodu

Případu skutečného paralelního rezonančního obvodu *RLC* odpovídá následující schéma:



Obr. 3.14 Schéma zapojení skutečného paralelního *RLC* obvodu

Parametry obvodu jsou totožné s předchozím případem. Výslednou hodnotu rezonančního kmitočtu je 1123 Hz určuje vztah (3.20).



Obr.3.15 Průběh proudu při rezonanci skutečného paralelního  $RLC$  obvodu

### 3.5 Vícenásobná rezonance

U složitějších obvodů s větším počtem induktorů a kapacitorů může nastat rezonance při různých kmitočtech. Výpočet rezonančních kmitočtů se zjednoduší, pokud jsou v obvodu uvažovány tlumivky s velkými činiteli jakosti, jejichž činné odpory lze zanedbat. Pokud se například určuje rezonanční kmitočet dle obvodu na Obr.

3.16, platí pro impedanci vztah:

$$\hat{Z}(\omega) = j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 \left( -j \frac{1}{\omega C} \right)}{j\omega L_2 - j \frac{1}{\omega C}} \quad (3.21)$$

Výraz se postupně upraví a položí se roven nule:

$$j \frac{\omega L_1 + L_2 + \omega^2 L_1 L_2 C}{1 - \omega^2 L_2 C} = 0 \quad (3.22)$$

Odtud pro jednotlivé kmitočty rezonance platí:

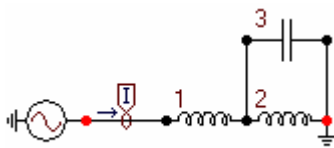
$$f_{r1} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{C} \left( \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_1} \right)} \quad (3.23)$$

Při tomto kmitočtu nastává sériová rezonance, impedance je nulová, obvod představuje pro proud zkrat. Při paralelní rezonanci je admitance obvodu rovna nule, pro druhý rezonanční kmitočet platí vztah:

$$f_{r2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{L_2 C}} \quad (3.24)$$

### Řešení programem ATP

Výpočet je proveden pro zapojení podle Obr. 3.16. Jedná se zde o sériově paralelní reaktanční obvod s dvojnásobnou rezonancí napájený zdrojem střídavého napětí o amplitudě  $U = 100$  V a frekvenci  $f = 50$  Hz. Jsou zde uvažovány indukory s velkým činitelem jakosti, odpory induktorů jsou zanedbány.



Obr. 3.16 Schéma zapojení sériově paralelního  $RLC$  obvodu

V tomto případě již není využito automatického očíslování uzlů preprocesorem ATPDraw, jako tomu bylo v předchozích případech, ale je zde využito individuálního očíslování. Kliknutím myši na daný uzel se vyvolá dialogové okno, kde se do horní buňky tohoto okna určí číslo uzlu. Rozmístění jednotlivých prvků a jejich hodnoty jsou následující:

Induktor  $L_1$  mezi 1 - 2 má velikost 10 mH

Induktor  $L_2$  mezi 4 - zem má velikost 20 mH

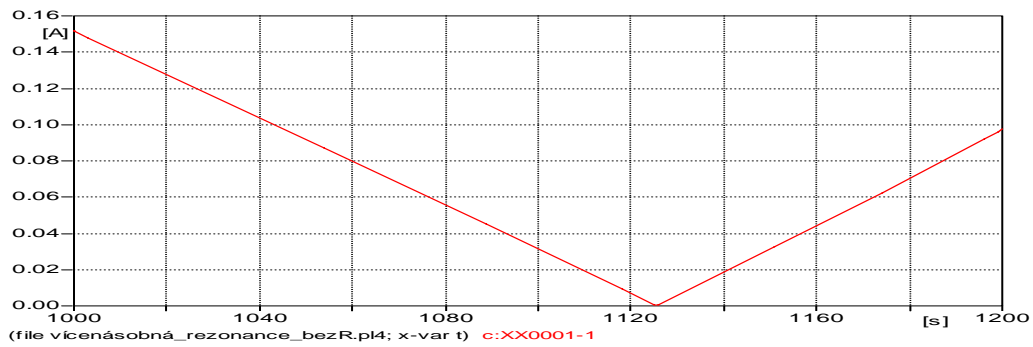
Kapacitor  $C$  mezi 3 - zem má velikost 1  $\mu$ F.

Pro tyto hodnoty obvodu jsou jednotlivé kmitočty rezonance rovny:

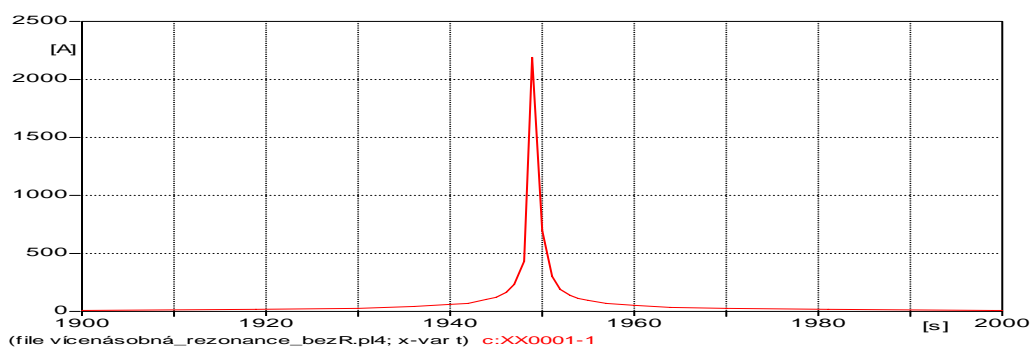
$$f_{r1} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{C} \left( \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_1} \right)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{1 \cdot 10^{-6}} \left( \frac{1}{20 \cdot 10^{-3}} + \frac{1}{10 \cdot 10^{-3}} \right)} = 1949 \text{ Hz} \quad (3.25)$$

$$f_{r2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{L_2 C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{20 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}} = 1125 \text{ Hz} \quad (3.26)$$

Na Obr. 3.17 je detail průběhu proudu při paralelní rezonanci (1125 Hz) a na Obr. 3.18 detail průběhu proudu při sériové rezonanci (1949 Hz).

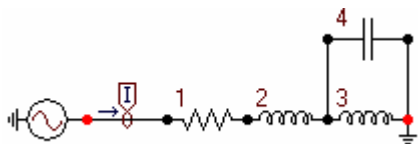


Obr. 3.17 Průběh proudu při vícenásobné rezonanci sériově paralelního obvodu  $RLC$  (paralelní rezonance)

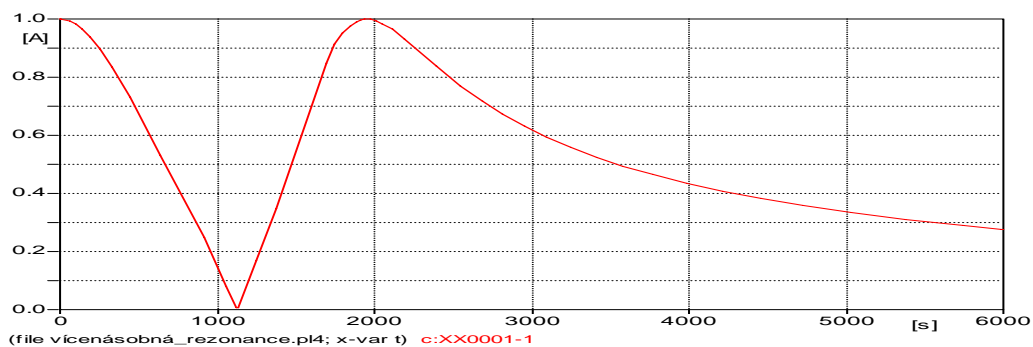


Obr. 3.18 Průběh proudu při vícenásobné rezonanci sériově paralelního obvodu  $RLC$  (sériová rezonance)

Vložení sériového rezistoru  $R = 100 \Omega$  dojde k omezení proudu v obvodu při sériové rezonanci.



Obr. 3.19 Schéma zapojení sériově paralelního  $RLC$  obvodu s omezením amplitudy proudu při sériové rezonanci



Obr. 3.20 Průběh proudu při vícenásobné rezonanci sériově paralelního obvodu  $RLC$  s omezením proudu